Sesión preparatoria Olimpiada Nacional 2017-18

(ENUNCIADOS)

Sevilla, 23 de febrero de 2018

1.- Sea $\{a_n\}_n$ la sucesión de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8,..., a_n , ... donde, $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$, n>1

a) Probar que para todo n, $a_n < 2^n$.

- b) Probar que el término general se expresa: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$
- 2.- Probar que no existe una función entera: $f: Z \longrightarrow Z$ tal que f(x + f(y)) = f(x) y para cualesquiera enteros x, y
- 3.- Si a, b, c son enteros tales que $a^6 + 2b^6 = 4c^6$, demuéstrese que a = b = c = 0.
- 4.- A una fiesta asisten k parejas de cónyuges. La anfitriona, A, observa que todos los demás han saludado a un número distinto de personas. ¿A cuántas personas ha saludado su cónyuge, E? (Se supone que los cónyuges no se saludan).
- 5.- Sin usar ninguna tabla encontrar el valor exacto de:

$$P = \cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}$$

[Indicación: utilizar la siguiente fórmula que deberá demostrarse por inducción:

$$\cos x \cos 2x \cos 4x \cdots \cos 2^{n-1}x = \frac{\sin 2^n x}{2^n \sin x}$$

(Olimpiada húngara 1967, sin la indicación)

- 6.- Para cada número natural $n \ge 1$ escribimos: $(1 + \sqrt{2})^{2n+1} = a_n + b_n \sqrt{2}$ definiéndose así las sucesiones de enteros $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$.
 - a) Demostrar que a_n , b_n son impares para cada n.
 - b) Demostrar que b_n es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos: $\frac{a_n + (-1)^n}{2} \quad y \quad \frac{a_n (-1)^n}{2}$

$$\frac{a_n + (-1)^n}{2}$$
 $y \frac{a_n - (-1)^n}{2}$

(Fase Local Olimpiada País Vasco, 1992)

7.-Sea $f: N - \{0\} ---> Q$ definida así:

$$f(1) = 1996$$
; $f(1) + f(2) + \dots + f(n) = n^2 \cdot f(n)$, para todo $n > 1$.

Calcular el valor exacto de f(1996). --- (Olimpiada Británica, 1996)

8.- El problema de Josephus:

En una reunión hay n persona sentadas alrededor de una mesa y numeradas de 1 a n. Se comienza por la número 1 y se elimina la segunda; se continúa así con la siguiente persona y eliminando siempre la segunda. Y así hasta que todas, salvo una, quedan eliminadas. ¿Cuál es la persona que se salva?

