Sesión preparatoria Olimpiada Nacional 2017-18

(ENUNCIADOS)

Sevilla, 23 de febrero de 2018

1.- Sea $\{a_n\}_n$ la sucesión de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8,…, a_n, … donde, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, n>1

a) Probar que para todo n, $a_n < 2^n$.

b) Probar que el término general se expresa: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} . \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

2.- Probar que no existe una función entera: $f: Z \text{ ---> } Z$ tal que $f(x + f(y)) = f(x) - y$ para cualesquiera enteros x, y

3.- Si a, b, c son enteros tales que $a^6 + 2b^6 = 4c^6$, demuéstrese que $a = b = c = 0$.

4.- A una fiesta asisten k parejas de cónyuges. La anfitriona, **A**, observa que todos los demás han saludado a un número distinto de personas. ¿A cuántas personas ha saludado su cónyuge, **E**? (Se supone que los cónyuges no se saludan).

5.- Sin usar ninguna tabla encontrar el valor exacto de:

$$P = \cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}$$

[Indicación: utilizar la siguiente fórmula que deberá demostrarse por inducción:
$\cos x \cos 2x \cos 4x \cdots \cos 2^{n-1}x = \frac{\sin 2^n x}{2^n \sin x}$]

(*Olimpiada húngara 1967, sin la indicación*)

6.- Para cada número natural $n \geq 1$ escribimos: $(1+\sqrt{2})^{2n+1} = a_n + b_n\sqrt{2}$ definiéndose así las sucesiones de enteros $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$.

a) Demostrar que a_n, b_n son impares para cada n.
b) Demostrar que b_n es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos:

$$\frac{a_n + (-1)^n}{2} \quad y \quad \frac{a_n - (-1)^n}{2}$$

(*Fase Local Olimpiada País Vasco, 1992*)

7.-Sea $f: N - \{0\} \text{ ---> } Q$ definida así:

$$f(1) = 1996; \quad f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = n^2 \cdot f(n), \text{ para todo } n>1.$$

Calcular el valor exacto de f(1996). --- (*Olimpiada Británica, 1996*)

8.- El problema de Josephus:

En una reunión hay n persona sentadas alrededor de una mesa y numeradas de 1 a n. Se comienza por la número 1 y se elimina la segunda; se continúa así con la siguiente persona y eliminando siempre la segunda. Y así hasta que todas, salvo una, quedan eliminadas. ¿Cuál es la persona que se salva?